Universidad de Sonora
Departamento de Ingeniería Industrial

Costos en Ingeniería

Tema 5. Análisis de costos

Profesor Alejandro Valenzuela

1. La producción

Las **empresas** producen con el objetivo de obtener ganancias (π). La ganancia es la diferencia entre los ingresos y los costos.

Los ingresos (PQ) provienen de las ventas y se obtienen multiplicando la cantidad producida (Q) por el precio por unidad (P).

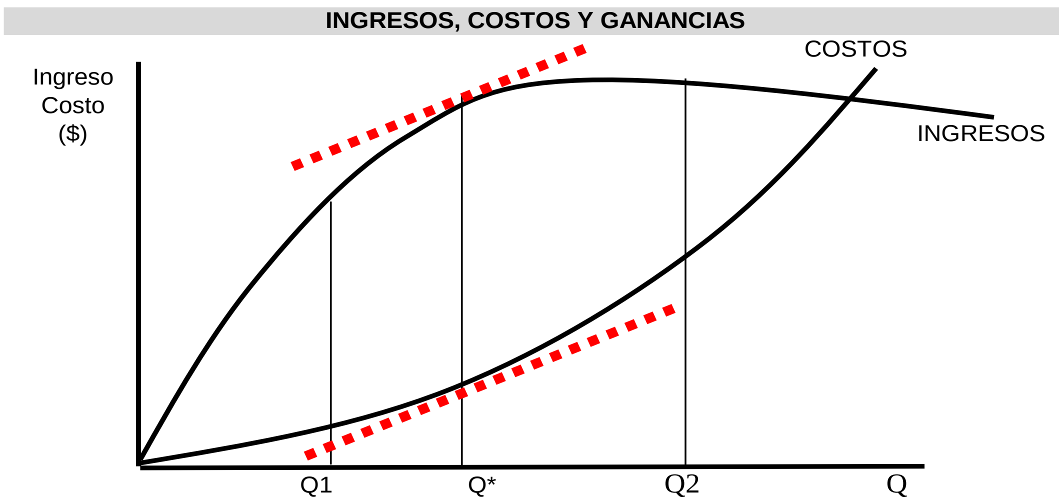
Los costos (C) son la suma de los costos variables y los costos fijos. En resumen, la **ecuación de ganancias** es:

$\boldsymbol{\pi = PQ - C}$

La curva que describe los ingresos tiene pendiente positiva y decreciente (es cóncava). Esa pendiente mide el Ingreso Marginal (IMg)[1], es decir, el cambio en el ingreso total por cada aumento unitario en el producto. Eso se debe a que al vender una unidad más, los ingresos crecen, pero conforme más se vende más difícil es vender.

La curva que describe los costos tiene pendiente positiva y creciente (es convexa). Esa pendiente mide el Costo Marginal (CMg), es decir, el cambio en el costo total por cada aumento unitario en el producto. Eso se debe a que entre más se produce, más difícil es aumentar la producción.

En la gráfica, a la izquierda de Q*, el IMg > CMg y, por tanto, es provechoso que la empresa produzca más. A la derecha de Q*, el IMg < CMg, por lo que la empresa debe producir menos. En Q*, IMg = CMg. Allí es la producción de equilibrio, la producción que minimiza los costos y maximiza la ganancia.



[1] El ingreso marginal y cualquier cantidad marginal no es otra cosa que la derivada de la variable de interés respecto a otra, y está dada (la cantidad marginal) por la pendiente de la tangente. Así, **derivada, cambio marginal y pendiente de la tangente son términos equivalentes.**

La producción de la empresa está en función (resultado) del uso de **insumos** como los materiales y el trabajo. El uso de todos los materiales (materia prima, maquinaria, herramientas, equipo e instalaciones) se le llama capital (K) y todo lo demás es el trabajo (L).

Se puede decir, entonces, de una manera muy resumida, que la producción es una función de los insumos K y L a la que llamamos **función de producción**:

$\boldsymbol{Q = f(L, K)}$

La función de producción es una relación técnica entre los insumos y el producto que depende de la tecnología y que describe el máximo producto que se puede producir con cada combinación de insumos. La tecnología determina el mínimo producto que se puede producir con cada combinación de insumos.

La función de producción debe ser cóncava, continua y diferenciable para que pueda ser una función.

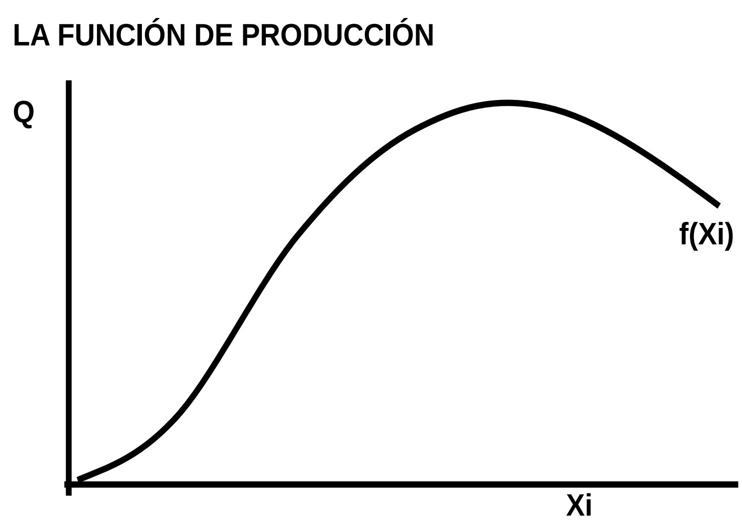
Hay muchas funciones de producción, pero hay una que tiene características muy generales. Se llama **función de producción Cobb-Douglas** y se expresa de la siguiente manera:

$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$

Los insumos podrían estar desagregados en **n** insumos, pero en general dice que, dada a tecnología (A), los insumos son los responsables de generar el producto en determinadas proporciones que no pueden exceder del 100%, como es lógico. Si, por ejemplo, la participación del trabajo en el producto (α) es de 40%, entonces la participación del capital en el producto (β) será de 60%, es decir, 0.4 y 0.6, respectivamente.

Una característica adicional es que $\alpha + \beta \leq 0$. La suma podría ser menor que cero porque no siempre es posible meter en una función todas las variables independientes que explican la variable dependiente.

La gráfica típica de una función de producción Cobb-Douglas es la siguiente:



Sobre la producción hay que tener en mente dos indicadores muy importantes: el producto medio y el producto marginal.

El producto medio (o promedio) es la cantidad de producto que genera en promedio cada unidad de insumo. Se obtiene dividiendo la cantidad total de producto entre el número de unidades usadas de un insumo. Así, hay un producto medio del trabajo y otro del capital:

$$PMeL = \frac{Q}{L} \quad \text{y} \quad PMeK = \frac{Q}{K}$$

Normalmente, el que se usa para medir la productividad de las empresas es el producto medio (si en una empresa el producto medio por trabajador es mayor que en otra, esa empresa es más productiva. Por ejemplo, si se producen 100 unidades y se emplean 10 trabajadores, el producto medio es 10 unidades por trabajador.

El producto marginal es el incremento en el producto total que se registra cuando se emplea una unidad adicional de insumo variable (todos los demás insumos deben permanecer constantes). Supongamos que se emplean 10 trabajadores y que se producen 100 unidades de producto. Supongamos también que la empresa contrata un trabajador más y que el producto aumenta a 107 unidades. Entonces el producto marginal del trabajador adicional es de 7 unidades. Entre más es la producción, menor es el producto marginal (a eso se le llama **ley de los rendimientos marginales decrecientes**) es lo que da la curvatura cóncava al ingreso y a la función de producción.

Hay un producto marginal del trabajo (PMgL) y un producto marginal del capital (PMgK).

2. Los costos

Los costos totales (C) son la suma de los costos variables y los costos fijos:

C = CVT + CFT

Como los costos fijos los podemos representar simplemente por F, digamos que los costos variables están constituidos por la compra de los insumos, trabajo y capital. Si usamos **w** para representar el salario (el costo del trabajo) y **r** para representar el costo del capital, entonces tendremos la siguiente **ecuación de costos**:

$$\boldsymbol{C = wL + rK + F}$$

Hay en los costos también dos indicadores uy importantes: los costos medios y los costos marginales.

Los costos medios se obtienen dividiendo el costo total entre la cantidad de producto generada e indican cuánto cuesta producir una unidad de producto.

$$CMe = \frac{C}{q}$$

Los costos medios decrecen, llega un momento en que alcanzan un mínimo y luego crecen continuamente describiendo una gráfica en forma de U. Esto se debe a que los costos fijos por unidad de producto decrecen conforme aumenta la producción hasta llegar casi a cero.

Los costos marginales, que son el aumento en el costo total cuando el producto aumenta en una unidad, se obtienen por la derivada de la función de costos:

$$CMg = \frac{dC}{dq}$$

Eso nos dice que cada unidad más de producto causa un incremento en el costo total, al igual que causa un aumento en el ingreso total. Si el costo adicional es menor que el ingreso adicional, entonces a la empresa no le conviene producir esa unidad adicional de producto.

3. Fijemos un punto

Si imaginamos que la empresa permanece en un nivel de producción fijo y en un nivel de costos fijos, entonces podemos imaginar cómo se mueven las combinaciones de insumos para ese nivel fijo de productos o costos. Por ejemplo, si fijamos la producción en 200 unidades y para ello usamos 25L y 9K, también podemos producir esas mismas 200 unidades, subiendo K y bajando L. Por ejemplo, usando 20L y 11K.

La curva isocuanta representa un nivel fijo de producto que muestra todas las combinaciones de insumos que producen lo mismo. Es una curva convexa, con pendiente negativa, pero decreciente, que no se cruzan entre sí ni cruzan los ejes.

Si usamos una función de producción Cobb-Douglas como la siguiente[2]:

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

Entonces, la ecuación de la isocuanta se obtiene despejando K:

$$\boldsymbol{K = \left(\frac{Q}{AL^{\alpha}}\right)^{1/\beta}}$$

Por ejemplo, si Q = 100, A = 9, α= 0.3 y β=0.5, ¿cuál es la cantidad de capital si se usan 25 unidades de trabajo?

$$K = \left(\frac{100}{10(25^{0.3})}\right)^{1/0.5} \Rightarrow K = \left(\frac{100}{10(2.62653)}\right)^{2} \Rightarrow \text{K= 14.4956}$$

Es decir, la combinación (L, K) = (25, 14.4956) está sobre la isocuanta.

La pendiente de la curva isocuanta se llama Tasa Marginal de Sustitución Técnica (TMST) y está dada por la relación de productos marginales:

$$TMST = \frac{PMgL}{PMgK}$$

[2] La función de producción Cobb-Douglas puede tener **n** variables: $Y = AX_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n}$ con las mismas características: $\sum \alpha_i \leq 0$ y por lo tanto, $0 \leq \alpha_i \leq 1$

El **isocosto** es un nivel fijo de costos que representa, también, todas las combinaciones de insumos que lo mantienen. Es decir, **el isocosto muestra todas las combinaciones de insumos que cuestan lo mismo.**

Ahora, si usamos la **ecuación** de costos:

$C = wL + rK + F$

Entonces, podemos despejar K para obtener **la ecuación del isocosto**:

$\boldsymbol{K = \frac{C-F}{r} - \frac{w}{r}L}$

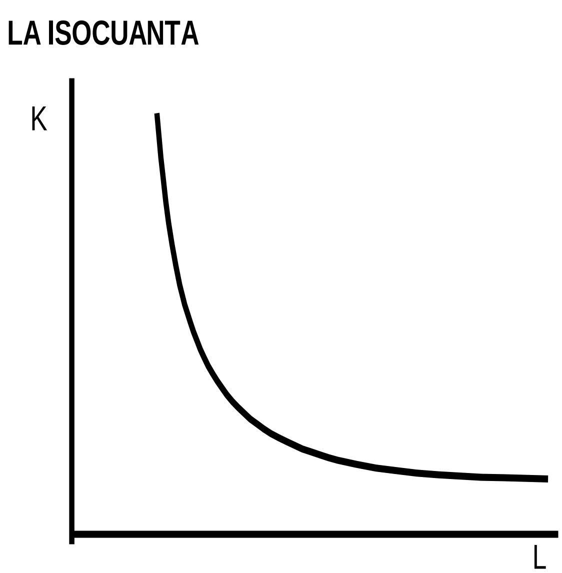
Por ejemplo, si C=1000, F = 200, r= 20 y w=10, ¿cuántas unidades de capital podemos adquirir si contratamos 20 unidades de trabajo?

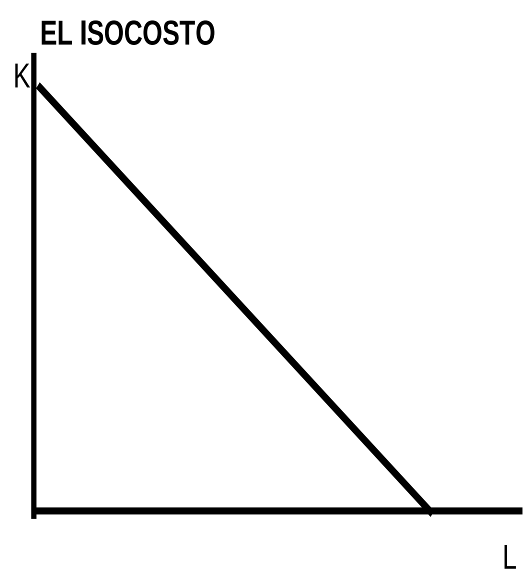
$\boldsymbol{K = \frac{1000-200}{20} - \frac{10}{20}L}$ ➔ $\boldsymbol{K\ =\ 40\ -0.5L}$

Así, si L = 20, entonces, K tendría que ser de 30 unidades. La combinación (L, K) = (20, 30) están sobre el isocosto.

La pendiente del isocosto está dado por la parte **w/r**, es decir, por la relación de precios de los insumos.

Si se quiere mover a lo largo de la isocuanta o del isocosto, la cantidad de insumos se mueven en sentido contrario. Si se avanza a la derecha, el capital se reduce y el trabajo aumenta. Viceversa hacia la izquierda.



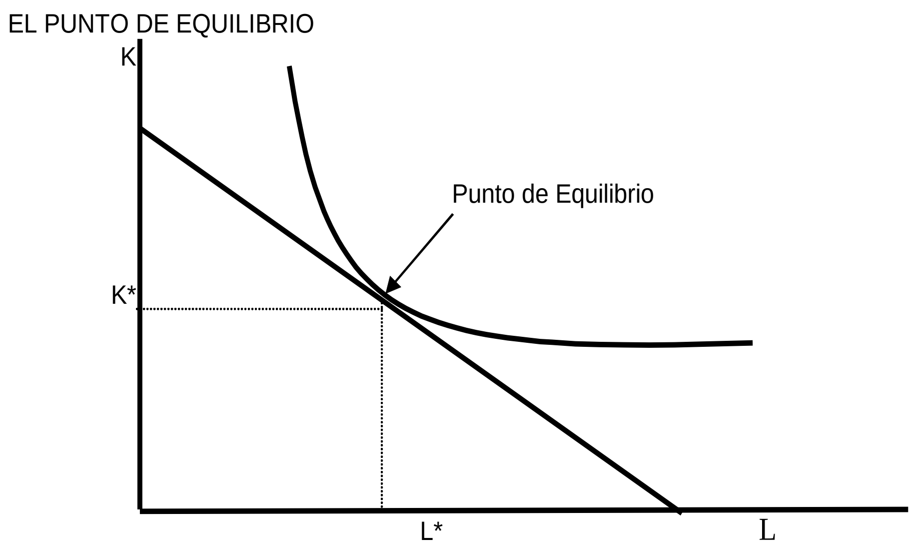


4. El punto de equilibrio

En el plano cartesiano hay una cantidad infinita de isocuantas e isocostos. Si la isocuanta (cómo se produce un nivel de producto) está por encima del isocosto (cómo se gasta un determinado presupuesto), entonces el presupuesto no alcanza para producir ese nivel de producto. Si está por debajo, el presupuesto está sobrado… Por tanto, **el punto de equilibrio** de la empresa se alcanza cuando:

- El isocosto toca en un solo punto a la isocuanta.
- La pendiente de la isocuanta (TMST) y la pendiente del isocosto son iguales
- Se da la siguiente igualdad

$$TMST = \frac{w}{r} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{PMgL}{PMgK} = \frac{w}{r}$$



Como la pendiente del isocosto es w/r, obtengamos la pendiente de la isocuanta (la TMST)

Si $Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$, las derivadas parciales de esta expresión son:

$PMgL = \frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}$ y $PMgK = \frac{\partial Q}{\partial K} = \beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}$ y

$$TMST = \frac{\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}} = \frac{\alpha L^{\beta}K^{-\beta+1}}{\beta AL^{\alpha}L^{-\alpha+1}} = \frac{\alpha K}{\beta L}$$

Entonces, si se tiene una función Cobb-Douglas de dos insumos ($Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$) siempre

$$TMST = \frac{\alpha K}{\beta L}$$

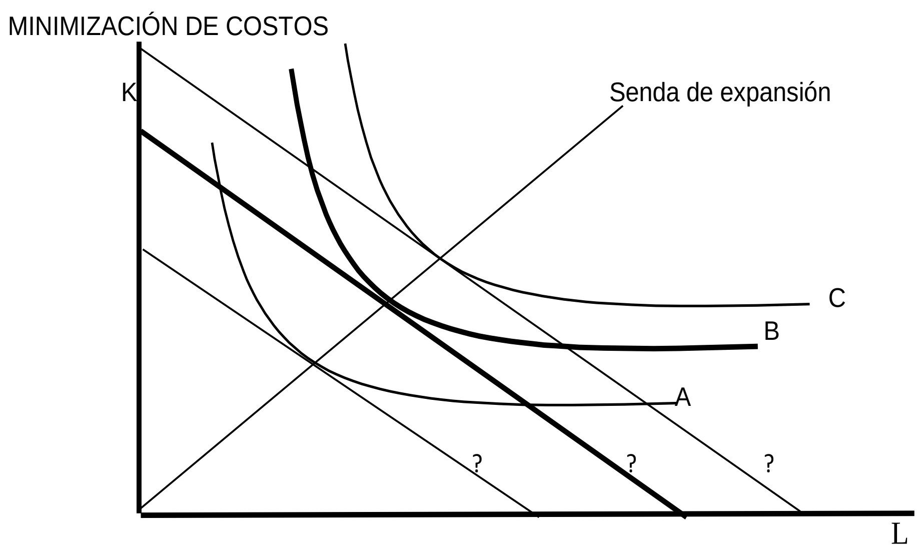
Por tanto, **el punto de equilibrio** estará dado por:

$$\frac{\alpha K}{\beta L} = \frac{w}{r}$$

5. Minimización de costos

La empresa minimiza costos cuando alcanza un punto de equilibrio. Como hay una cantidad infinita de isocuantas e isocostos, entonces hay también una cantidad infinita de puntos de equilibrio, uno para cada nivel de producto, como lo muestra la senda de expansión, que es la línea que une los puntos de equilibrio.

Por lo tanto, hay una minimización de costos **para cada nivel de producto**. Vea la gráfica. Para el nivel de producto A hay un costo mínimo, que es ❶; para el producto B, el costo mínimo es ❷, y para C es ❸.



La idea básica es que primero se establece el nivel de producto y luego se busca el costo mínimo.

El algoritmo es el siguiente. Suponga que Q° es un nivel fijo de producto y, por lo tanto (dado que siempre el producto depende de los insumos): $Q° = AL^{\alpha}K^{\beta}$

1. Establezca el punto de equilibrio. Recuerde que es:

$$\frac{\alpha K}{\beta L} = \frac{w}{r}$$

2. Despeje primero K y luego L del punto de equilibrio

$$K = \frac{\beta}{\alpha}\frac{w}{r}L \qquad \text{y} \qquad L = \frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{w}K$$

3. Sustituya en Q° tanto K como L obtenidas en el paso anterior

$Q° = AL^{\alpha}(\frac{\beta}{\alpha}\frac{w}{r}L)^{\beta}$ y $Q° = A(\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{w}K)^{\alpha}K^{\beta}$

4. De cada una de estas expresiones, despeje la variable que quedó: L de la primera y K de la segunda. Lo que resulta son las demandas óptimas de insumos, que expresamos como L* y K*. Haya el intento de despejarlo, queda así:

$L* = \left(\frac{Q°}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ y $K* = \left(\frac{Q°}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$

5. Sustituya estas dos expresiones **en la ecuación de costos** ($C = wL + rK + F$) de manera simultánea para obtener la **función de costos (C*)** que será, siempre, una función del producto de la empresa [$C = f(Q)$]. Agrupe todos los parámetros en λ para simplificar. Intente hacerlo, pero queda sí:

$$C^{*} = \lambda Q°^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

6. Si en esta función de costos sustituye cualquier nivel de producto, obtendrá el costo mínimo para producirlo.

Antes de seguir con el algoritmo, hagamos un ejercicio para ver cómo funciona:
Supongamos la función de producción y la ecuación de costos siguientes:

$Q° = 25L^{0.3}K^{0.5}$ y $C = 100L + 200K$

(Nótese que A= 25, α=0.3, β=0.5, w=100, r=200 y F=0).

1. El punto de equilibrio (cualquiera que sea) está dado por:

$$\frac{0.3K}{0.5L} = \frac{100}{200}$$

2. Despeje K y L:

$K = \frac{0.5}{0.3}\frac{100}{200}L$ ➔ K=0.8333L y $L = \frac{0.3}{0.5}\frac{200}{100}K$ ➔ L= 1.2K

3. Sustituya en Q°

$Q° = 25L^{0.3}(0.8333L)^{0.5}$ y $Q° = 25(1.2K)^{0.3}K^{0.5}$

4. Obtenga las funciones de demanda de insumos (de trabajo y capital):

$Q° = 25L^{0.3+0.5}(0.912871)$ y $Q° = 25(1.05622)K^{0.5+0.3}$

$Q° = 22.8218L^{0.8}$ y $Q° = 26.4055K^{0.8}$

$L^{0.8} = \frac{Q°}{22.8218}$ y $K^{0.8} = \frac{Q°}{26.4055}$

$L = \left(\frac{Q°}{22.8218}\right)^{1/0.8}$ y $K = \left(\frac{Q°}{26.4055}\right)^{1/0.8}$

$L^{0.8} = 0.0200476Q°^{1.25}$ y $Q° = 0.0167064Q°^{1.25}$

Estas son las funciones que determinan la cantidad óptima de uso de insumos.

5. Sustituir las funciones anteriores en la ecuación de costos:

$C = 100L + 200K + 50$
$C = 100(0.0200476Q°^{1.25}) + 200(0.0167064Q°^{1.25})$
$C = 2.004764Q°^{1.25} + 3.341273Q°^{1.25}$
$C^* = 5.346Q°^{1.25}$

Esta es la función de costos que arroja el costo mínimo para cada nivel de producto.

6. Sí, por ejemplo, queremos que Q=200, el nivel mínimo de costos necesario será:

$C^* = 5.346(200)^{1.25}$ ➔ $C^* = 4020.84$

Seguimos con el algoritmo porque si tenemos una función de costos como la anterior, la pregunta ahora es, no cualquier nivel de producto, sino ¿cuál es el producto óptimo que maximice las ganancias de la empresa?

7. La función de ganancias es:

$\pi = PQ - C$

Se sustituye la C por la función de costos (sigamos con el ejemplo):

$\pi = PQ - 5.346Q^{1.25}$

8. Un máximo se obtiene derivando una función e igualando a cero la derivada:

$\frac{d\pi}{dQ} = P - 6.6825Q^{0.25}=0$

9. Si suponemos un precio de 25 pesos por unidad, y despejamos Q tendremos:

$25 = 6.6825Q^{0.25}$ ➔ $Q^* = \left(\frac{25}{6.6825}\right)^4$ ➔ $Q^* = 195.88$

El nivel de producto óptimo, que minimiza costos y maximiza ganancias es 195.88 unidades.

Preguntas adicionales: si Q*=195.88, ¿cuánto serán los costos mínimos para producir esa cantidad, los ingresos, el costo medio, las ganancias unitarias y las ganancias totales?

10. Ingresos

I=PQ= (25) (195.88) = 4,897

11. Costos mínimos

$C^* = 5.346Q^{\circ 1.25}$ ➔ $C^* = 5.346(195.88)^{1.25}$ ➔ C*= 3,917.57

12. Ganancias totales

$\pi = PQ - C$ ➔ $\pi = 4{,}897 - 3{,}917.57$ = 979.43

13. Costo medio

$CMe = \frac{C}{Q}$ ➔ $CMe = \frac{3{,}917.57}{195.88}$ ➔ CMe = 20.00

14. Ganancias unitarias

$\pi_U = P - CMe$ ➔ $\pi_U = 25 - 20$ ➔ π_U = 5.00

Cuadro resumen del ejemplo

Concepto	Símbolo/Ecuación	Cantidad
Tecnología	A	25
Contribución del trabajo	α	0.3
Contribución del capital	β	0.5
Precio	P	25
Producto óptimo	$Q° = 25L^{0.3}K^{0.5}$	195.88
Ingresos	PQ	4897
Costos mínimos	$C^{\wedge *} = 5.346Q^{1.25}$	3918
Ganancias totales	$\pi = PQ - C$	979
Costo medio	CMe=C/Q	20
Ganancias unitarias	$\pi_U = P - CMe$	5.00