UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Modelos de optimización de inventarios en una y dos variables

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Romero Bauset, José Vicente; Roselló Ferragud, María Dolores; Villanueva Micó, Rafael Jacinto (jccortes@imm.upv.es;jvromero@imm.upv.es; drosello@imm.upv.es;rjvillan@imm.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

El estudio de modelos de inventario es un tópico que aparece tratado de forma descriptiva en algunos textos de economía, pero, por nuestra experiencia, rara vez se analizan, de forma introductoria, utilizando métodos matemáticos. Sí es más usual encontrar tales modelos en la investigación, utilizando para ello técnicas de investigación operativa que suelen requerir el uso de software avanzado. La introducción al estudio matemático de este tipo de modelos resulta una valiosa herramienta formativa para todas aquellas personas interesadas en la modelización en general y, en la descripción cuantitativa de este tipo de modelos pertenecientes al ámbito de la economía, en particular. En este trabajo se presentan dos modelos sencillos de inventario en el cual la función objetivo considera la minimización de los costes asociados al stock. En el primer caso, únicamente se consideran los costes de reaprovisionamiento y de mantenimiento del inventario, mientras que en el segundo, se considera la posibilidad de que exista un retardo en la recepción del producto que compense los gastos derivados de que dicho producto esté en el almacén, generando así unos gastos de mantenimiento. En el primer caso, la función objetivo depende de una variable (la cantidad requerida en cada pedido para minimizar los costes del stock) y en el segundo caso, se llega a una función de dos variables, ya que, como hemos señalado se introduce además de la cantidad, el retraso en el pedido. Se utilizarán las herramientas clásicas de optimización en una y dos variables para optimizar las funciones objetivos planteadas y se relacionarán las soluciones en ambos modelos.

2 Introducción

Una de las aportaciones más importantes, que desde el punto de vista formativo supone el estudio de matemáticas, es la potencialidad de sus métodos y técnicas para interactuar con otras disciplinas. Este carácter interdisciplinar de las matemáticas, tiene hoy día un mayor valor formativo, dado que las empresas e instituciones precisan de profesionales de distintos áreas de conocimiento que en colaboración afronten los nuevos retos sociales y científicos. Desde ese punto de vista, la enseñanza de las matemáticas a través de modelos proporciona un valor añadido el cual no debemos desaprovechar.

En las páginas que siguen, se presentarán dos ejemplos de aplicación de las matemáticas a la modelización de un problema de interés económico: la gestión de inventarios. Concretamente, se abordará el estudio de dos modelos sencillos, pero de interés formativo, que resultan de utilidad para iniciarse posteriormente en el análisis de la minimización de los costes asociados a un inventario, al cual debe enfrentarse prácticamente cualquier empresa. A partir de ciertas hipótesis razonables para establecer estos primeros modelos, se formularán funciones objetivos de costes. Como se verá, estas funciones de costes dependen de una o dos variables, dependiendo del modelo considerado, y se calculará el mínimo de dichas funciones utilizando para ello las herramientas clásicas del Cálculo Diferencial en una y dos variables.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Reconocer el valor formativo de los herramientas clásicas de optimización en una y dos variables para estudiar modelos sencillos de gestión de inventarios o stocks.
- Reconocer las limitaciones que implican, desde un punto de vista de la simplificación de la realidad, la formulación de los modelos presentados.
- Establecer una relación entre los dos modelos de inventario que se presentan, admitiendo la posibilidad de formular otros más realistas para abordar el estudio de la gestión de stocks, que requerirán herramientas matemáticas más complejas para su estudio .

3.1 Un modelo de optimización de inventario en una variable

En este apartado se presentará un modelo sencillo de optimización de stocks o inventario. Los vendedores que ofertan productos almacenables se enfrentan a gastos relacionados con la gestión de las unidades del producto que venden. Por un lado, cada vez que realizan un pedido o solicitud de reaprovisionamiento, deben asumir los gastos que los proveedores les trasladan por servirles el producto que venden. Estos gastos son debidos, por ejemplo, al desplazamiento que debe realizar el proveedor desde la fábrica a la tienda del vendedor. Al mismo tiempo, en muchos casos, los vendedores también deben de cargar con los gastos que les supone mantener la mercancía que venden y que deben conservar en su stock para que el producto no se deteriore. En este caso, este gasto puede ser debido, por ejemplo, al pago de la iluminación, la refrigeración, el alquiler del almacén donde se almacena el stock de producto, etc. Al mismo tiempo, si, como por otra parte sería esperable, conocen la demanda del producto que venden, los vendedores están interesados en determinar las unidades de producto que deben realizar en cada pedido para minimizar los mencionados gastos de reaprovisionamiento y de mantenimiento. A continuación, se presentará un primer modelo sencillo para determinar, suponiendo conocida la demanda de producto y los costes de reaprovisionamiento y almacenamiento, el tamaño del pedido óptimo que minimice los costes asociados a cada unidad de producto por unidad de tiempo que está en el inventario o stock. Como en cualquier modelo, se partirá de unos supuestos iniciales -que destacaremos en letra cursiva a lo largo de la exposición- que simplificando el tratamiento matemático del modelo, resulten razonables desde el punto de vista de la realidad que tratan de describir.

Consideraremos que un vendedor desea satisfacer una "*demanda constante*" de r unidades de producto por unidad de tiempo. También asumiremos que cada vez que el vendedor realiza un pedido a su proveedor debe pagar un coste de c_1 u.m. (unidades monetarias) por la realización de dicho pedido. Estas nuevas unidades supondremos que las "*adquiere instantáneamente*". Por otra parte, asumiremos que los costes de mantenimiento del stock del producto son de c_2 u.m. por unidad de stock y por unidad de tiempo. Denotaremos por q a las unidades de producto que se solicitan en cada pedido para reponer la mercancía. Entonces, q/r representa el tiempo que se necesitará para que dicha cantidad sea vendida; en ese instante el vendedor ordenará un nuevo lote del producto (el cual, obsérvese que bajo las hipótesis establecidas se sirve inmediatamente). El proceso descrito se ilustra en la Figura 1.

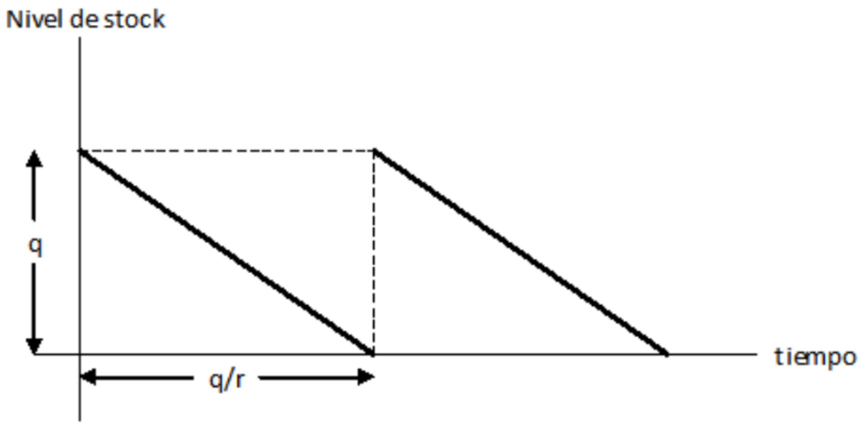

Figura 1. Modelo 1: Representación gráfica del nivel de stock con el paso del tiempo. Se trata de un gráfico denominado del tipo "diente de sierra".

Si denotamos el nivel de stock en el instante t por $S(t)$, claramente dicho valor viene determinado por la diferencia entre la cantidad q del pedido y la cantidad vendida en el instante t, es decir, $S(t) = q - rt$ (véase Ecuación 1).

$$S(t) = q - rt$$

Ecuación 1. Modelo 1: Nivel de inventario en el instante t.

Por otra parte, los costes cuando se realiza un pedido están determinados por la suma de los costes de cada pedido, i.e., c_1, y los costes generados por el mantenimiento del stock existente en momento de efectuar el pedido. Estos últimos costes se pueden calcular como el producto del coste de mantenimiento por unidad de producto y de tiempo y el stock en el instante del pedido. Este segundo factor viene dado por una suma continua en el tiempo, i.e., puede representarse por una integral del stock $S(t)$. Obsérvese que el stock se agota en el instante q/r. En resumen, los costes están dados en la Ecuación 2.

$$C(q) = c_1 + c_2 \int_0^{q/r} S(t)\, dt$$

Ecuación 2. Modelo 1: Costes totales del inventario.

Si sustituimos la Ec. 1 en la Ec. 2 y calculamos la integral, obtenemos explícitamente los costes del inventario en términos del tamaño q del pedido y de los datos c_1, c_2 y r (véase Ecuación 3).

$$C(q) = c_1 + \frac{1}{2}\frac{c_2}{r} q^2$$

Ecuación 3. Modelo 1: Costes totales explícitos del inventario.

El objetivo del vendedor es determinar el tamaño del pedido, q^*, que minimice los costes por unidad de tiempo generados por el inventario, i.e., calcular el mínimo de la función dada en la Ec.4, cuyo dominio contextualizado al modelo económico que estamos estudiando es: $q > 0$.

$$C_u(q) = \frac{r}{q}\left(c_1 + \frac{1}{2}\frac{c_2}{r}q^2\right)$$

Ecuación 4. Modelo 1: Costes por unidad de tiempo generados por el inventario.

Para calcular dicho mínimo utilizaremos las técnicas clásicas del Cálculo Diferencial en una variable. En primer lugar, calculamos los puntos críticos o candidatos a mínimo de $C_u(q)$, que son aquellos puntos donde la primera derivada es nula. Después de cálculos sencillos, obtenemos $q^* = \sqrt{\frac{2rc_1}{c_2}} > 0$, que es un punto que pertenece al dominio de esta función. A continuación, clasificamos el punto crítico evaluando la segunda derivada de la función objetivo en el punto crítico, y viendo que el valor obtenido es positivo. Esto nos permite afirmar que q^* es un mínimo local o relativo de $C_u(q)$. Pero, podemos también afirmar que es un mínimo global o absoluto, ya que, la segunda derivada es positiva en todo punto del dominio (el cual es un conjunto convexo al tratarse del intervalo), lo que nos indica que la función es convexa, i.e., tiene forma de cuenco (véase Ecuación 5).

$$\frac{dC_u(q)}{dq} = \frac{c_2}{2} - \frac{rc_1}{q^2} = 0 \Rightarrow q^* = \sqrt{\frac{2rc_1}{c_2}} > 0. \qquad \frac{d^2C_u(q^*)}{dq^2} = \frac{c_2\sqrt{c_2}}{\sqrt{2rc_1}} > 0$$

$$\frac{d^2C_u(q)}{dq^2} = \frac{2rc_1}{q^3} > 0, \quad \forall q > 0$$

Ecuación 5. Modelo 1: Comprobación de que el punto crítico q^* es mínimo global o absoluto.

3.2 Un modelo de optimización de inventario en dos variables

El modelo de stock presentado en el apartado anterior puede mejorarse introduciendo un coste estimado c_3 por unidad de stock por unidad de retraso en la recepción del producto. En la práctica estos costes podrían ser debidos a la pérdida de clientes, por ejemplo. Sin embargo, podría valer la pena pagar los costes en los que se incurren por el retraso de la recepción del producto con objeto de reducir los costes de almacenamiento si estos últimos son más altos. Con objeto de formular un modelo que extienda el anterior, pero que tenga en cuenta esta idea, como antes, vamos a introducir cierta notación e hipótesis que nos ayuden a modelizar el problema.

En el contexto anterior, la rotura de stock, i.e., la falta de producto empezará después del instante q/r. Denotaremos por τ el tiempo entre pedidos (asumiendo para que tenga sentido nuestro planteamiento que $\tau > q/r$) y $r\tau > q$ la cantidad que se necesitará para compensar la rotura del stock (véase la Figura 2).

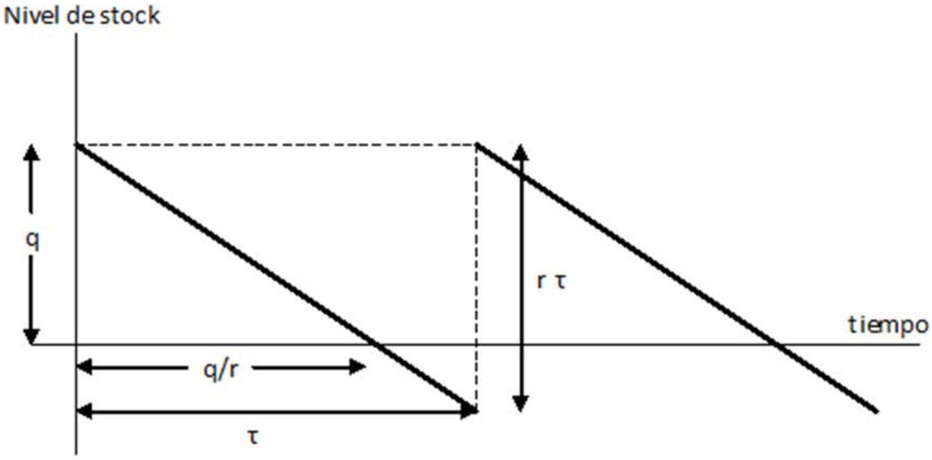

Figura 2. Modelo 2: Representación gráfica del nivel de stock con el paso del tiempo. Se trata de un gráfico denominado del tipo "diente de sierra".

A diferencia del primer modelo presentado, ahora estamos interesados en determinar los valores óptimos del tamaño del pedido, que denotaremos por, $\tilde{q}$, y del tiempo entre pedidos, $\tilde{\tau}$, que minimicen los costes. Por tanto, ahora la función objetivo dependerá de dos variables. Para mayor claridad en la presentación de las ideas, seguiremos en la medida de lo posible un desarrollo análogo al desarrollado en el primer modelo. Obsérvese que para calcular la función de costes totales del inventario hay que añadirle a costes totales del Modelo 1 (véase Ec.2) los derivados del retraso en la recepción del producto. Obviamente, estos costes tienen lugar durante el intervalo de tiempo $\left[q/r, \tau\right]$, por cada unidad de producto que falta (que está dado por $-S(t)$) al coste c_3. Esto nos conduce a que la nueva función de costes es la dada en la Ecuación 6.

$$C(q,\tau) = c_1 + c_2 \int_0^{q/r} S(t)\,dt + c_3 \int_{q/r}^{\tau} (-S(t))\,dt$$

Ecuación 6. Modelo 2: Costes totales del inventario.

Sustituyendo la Ec. 1 en la Ec. 6 y calculando la segunda integral (los dos primeros sumandos ya fueron calculados en el Modelo 1, (véase Ec.2)), se obtiene el coste total (véase Ecuación 7).

$$C(q,\tau) = c_1 + \frac{1}{2}\frac{c_2}{r} q^2 + c_3 \left(\frac{1}{2r} q^2 - q\tau + \frac{r\tau^2}{2} \right)$$

Ecuación 7. Modelo 2: Costes totales explícitos del inventario.

Y la función de costes totales por unidad de tiempo (que ahora expresaremos en términos de τ) está dada en la Ecuación 8.

$$C_u(q,\tau) = \frac{c_1}{\tau} + \frac{1}{2}\frac{c_2}{r\tau} q^2 + \frac{1}{2}\frac{c_3}{r\tau}(r\tau - q)^2$$

Ecuación 8. Modelo 2: Costes por unidad de tiempo generados por el inventario.

Para calcular los valores óptimos $\tilde{q}$ y $\tilde{\tau}$, de la función objetivo $C_u(q,\tau)$ utilizaremos los resultados clásicos de optimización en varias variables. Cabe señalar que el dominio económico de esta función es el primer cuadrante del plano, i.e., donde se cumple que: $q > 0, \tau > 0$. Por ello, en primer lugar calcularemos los puntos críticos, que son aquellos que estando en el dominio anulan las derivadas parciales de la función $C_u(q,\tau)$ (véase Ecuación 9).

$$\left.\begin{array}{rcccl} \dfrac{\partial C_u(q,\tau)}{\partial q} & = & \dfrac{c_2 q + c_3 q - r\,\tau}{r\,\tau} & = & 0 \\ \dfrac{\partial C_u(q,\tau)}{\partial \tau} & = & -\dfrac{c_2 q^2 + c_3 q^2 + 2c_1 r - c_3 r^2 \tau^2}{2r\,\tau} & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \tilde{q} & = & \sqrt{\dfrac{2rc_1c_3}{c_2\left(c_2 + c_3\right)}} > 0 \\ \tilde{\tau} & = & \sqrt{\dfrac{2c_1\left(c_2 + c_3\right)}{rc_2c_3}} > 0 \end{array}$$

Ecuación 9. Modelo 2: Cálculo de los puntos críticos.

Para justificar que el punto crítico $(\tilde{q},\tilde{\tau})$ es mínimo local o relativo de $C_u(q,\tau)$, se requiere evaluar la matriz hessiana de dicha función (formada por sus cuatro derivadas parciales segundas) en el punto crítico y comprobar que el valor de la entrada (1,1), $\tilde{h}_{11}$, y el determinante son positivos. Los cálculos se detallan en las Ecuaciones 10, 11 y 12.

$$\text{Hessiana}(C_u(q,\tau)) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 C_u(q,\tau)}{\partial q^2} & \dfrac{\partial^2 C_u(q,\tau)}{\partial q\,\partial \tau} \\ \dfrac{\partial^2 C_u(q,\tau)}{\partial q\,\partial \tau} & \dfrac{\partial^2 C_u(q,\tau)}{\partial q^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_2 + c_3}{r\,\tau} & -\dfrac{(c_2 + c_3)q}{r\,\tau^2} \\ -\dfrac{(c_2 + c_3)q}{r\,\tau^2} & \dfrac{(c_2 + c_3)q^2 + 2rc_1}{r\,\tau^3} \end{bmatrix}$$

Ecuación 10. Modelo 2: Justificación del que el punto crítico es mínimo local. Paso 1: Cálculo de la matriz hessiana.

$$\text{Hessiana}(C_u(\tilde{q},\tilde{\tau})) = \begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{c_2c_3\left(c_2 + c_3\right)}{2rc_1}} & -c_2c_3\sqrt{\dfrac{rc_3}{2c_1c_2\left(c_2 + c_3\right)}} \\ -c_2c_3\sqrt{\dfrac{rc_3}{2c_1c_2\left(c_2 + c_3\right)}} & c_2c_3r\sqrt{\dfrac{rc_3}{2c_1c_2\left(c_2 + c_3\right)}} \end{bmatrix}$$

Ecuación 11. Modelo 2: Justificación del que el punto crítico es mínimo local. Paso 2: Evaluación de la matriz hessiana en el punto crítico.

$$\tilde{h}_{11} = \sqrt{\frac{c_2c_3\left(c_2 + c_3\right)}{2rc_1}} > 0, \quad \det(\text{Hessiana}(C_u(\tilde{q},\tilde{\tau}))) = \frac{r(c_2c_3)^2}{2c_1(c_2 + c_3)} > 0$$

Ecuación 12. Modelo 2: Justificación del que el punto crítico es mínimo local. Paso 3: Evaluación de los signos de la entrada (1,1), $\tilde{h}_{11}$, y del determinante de la matriz hessiana evaluada en el punto crítico.

Sería deseable justificar que estos valores $(\tilde{q},\tilde{\tau})$ minimizan globalmente la función objetivo. Para ello hay que demostrar que la función objetivo es cóncava, i.e., que tiene forma de campana sobre todo el dominio (el cual es claramente un conjunto convexo al tratarse de un cuadrante en el plano). Para demostrarlo hay que probar que se cumplen las mismas condiciones que hemos justificado para demostrar que el óptimo es mínimo local, pero evaluando la matriz hessiana en cualquier punto del dominio y no solo en el punto crítico. Es sencillo comprobar que estas condiciones se cumplen (véase Ecuación 13).

$$h_{11} = \frac{c_2 + c_3}{r\,\tau} > 0, \quad \det(\text{Hessiana}(C_u(q,\tau))) = \frac{2c_1(c_2 + c_3)}{r\,\tau^4} > 0$$

Ecuación 13. Modelo 2: Justificación del que el mínimo local es también mínimo global. Paso 4: Evaluación de los signos de la entrada (1,1), h_{11}*, y del determinante de la matriz hessiana en cualquier punto del dominio.*

4 Conectando ambos modelos de inventario

En los apartados anteriores hemos presentado dos modelos de inventario, de modo que en el segundo modelo, además de los costes de reaprovisionamiento, c_1, y de mantenimiento, c_2, se han incluido los costes del retardo en el reaprovisionamiento, c_3. La solución del Modelo 1 es la cantidad q^* que se debe realizar en cada pedido para minimizar los costes totales unitarios asociados al inventario (véase Ec. 5). Mientras que en el Modelo 2, además de dicha cantidad, $\tilde{q}$, también se determinó el retardo, $\tilde{\tau}$, que minimiza los costes correspondientes (véase Ec. 9). Obsérvese que si los costes por el retardo en el reaprovisionamiento son muchos mayores que los de mantenimiento del stock, entonces $c_2 + c_3 \cong c_3$, y como puede verse en la Ecuación 14, $\tilde{q} \cong q^*$. Además obsérvese que $\tilde{q} < q^*$ lo cual significa que con el retardo $\tilde{\tau}$ se necesita pedir menos cantidad para minimizar los costes unitarios.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Modelo 1:} & q^* & = \sqrt{\dfrac{2rc_1}{c_2}} \\ \text{Modelo 2:} & \tilde{q} & = \sqrt{\dfrac{2rc_1c_3}{c_2\left(c_2 + c_3\right)}} \end{array}\right\} \overset{c_2+c_3\cong c_3}{\Rightarrow} \tilde{q} = \sqrt{\frac{2rc_1c_3}{c_2\left(c_2+c_3\right)}} \cong \sqrt{\frac{2rc_1}{c_2}} = q^*$$

Ecuación 14. Relación entre las soluciones de los Modelos 1 y 2.

5 Cierre

En este trabajo se han estudiado dos modelos de inventario desde la perspectiva de la minimización de sus costes. Para el estudio se ha requerido realizar ciertas hipótesis simplificadoras que permitieran el análisis posterior de ambos modelos mediante las técnicas del Cálculo Diferencial. El objetivo principal de este trabajo docente es proporcionar al lector una situación de interés económico donde se muestre la potencia de las matemáticas para modelizar problemas económicos y que permite servir de estímulo a todos aquellos que estando interesados en la modelización de problemas que pertenecen en su contexto a la realidad económica quieran introducirse en el método matemático para analizarlos.

6 Bibliografía

[1] Chiang, A.: "Métodos Fundamentales de Economía Matemática", Ed. McGraw-Hill, 1993.

Este libro expone los temas clásicos de álgebra lineal, cálculo infinitesimal y programación matemática con una fuerte vocación de mostrar ejemplos de interés para la economía. En algunos de los capítulos, el autor dedica extensas explicaciones de los conceptos matemáticos que se estudian para motivar la utilidad de los mismos en economía.