**Alejandro Valenzuela**

**2.3. REGLAS DE PROBABILIDAD**

**Instituto Sonorense de Administración Pública**

**Posgrados**

Dados los enfoques de probabilidad (vistos en el subtema anterior), hay dos **reglas para el cálculo** de probabilidades: La **regla de la suma** en eventos que pueden ser o no mutuamente excluyentes y la **regla de la multiplicación** en eventos dependientes e independientes. De la regla de la multiplicación se derivan las reglas de la probabilidad conjunta y de la probabilidad condicional.

# Regla de la suma

Como su nombre lo dice, es una suma de probabilidades de distintos eventos. Sin embargo, los eventos cuya probabilidad se suma, pueden ser excluyentes (que no pueden aparecer simultáneamente) o no excluyentes (que no son iguales, pero algunos elementos pueden aparecer en un evento y en otro). Es decir, se aplica para **probabilidades del tipo A o B** (cuyo símbolo es ∪): o sucede A, o sucede B o suceden los dos al mismo tiempo, si se puede, porque los hay que son excluyentes.

En este caso, se buscan probabilidades que ocurren separadas, aunque algunas podrían ir juntas.

## Eventos mutuamente excluyentes

Como estos eventos **no** pueden aparecer juntos, la probabilidad de ocurrencia de alguno de los eventos es igual a la suma de las probabilidades individuales. Como reza la regla, o sucede uno o sucede otro, es la probabilidad de A o la probabilidad de B:

$$P\left(A∪B\right)=P\left(A\right)+P(B)$$

Por ejemplo, la probabilidad de elegir un **as** (A) o un **rey** (B) en una baraja de 52 cartas, donde hay 4 ases y 4 reyes, pero no hay cartas que contengan los dos, es:

$$P\left(A∪B\right)=\frac{4}{52}+\frac{4}{52}=0.15$$

## Eventos no mutuamente excluyentes

Se trata de eventos que pueden caer en un conjunto, en otro en ambos. Es decir, que sus conjuntos de ocurrencia tienen una intersección. Se trata de la probabilidad de A o la probabilidad de B menos la probabilidad de A y B:

$$P\left(A∪B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P(A∩B)$$

Por ejemplo, la probabilidad de elegir un **corazón** o un **as** en una baraja de 52 cartas (sabiendo que 13 cartas son de corazones y 4 son ases, pero de los 4 ases uno es de corazones) es:

$$P\left(A∪B\right)=\frac{13}{52}+\frac{4}{52}-\frac{1}{52}=0.31$$

# Regla de la multiplicación

Su nombre proviene del hecho de que se trata de probabilidades que pueden ocurrir simultáneamente. Se trata de **probabilidades del tipo A y B** (cuyo símbolo es ∩): que suceda A y que suceda B al mismo tiempo. El procedimiento estándar es la multiplicación de ambas probabilidades.

Algunos eventos son **independientes** uno del otro. En otros casos, la aparición de uno de ellos **condiciona** la aparición del otro. En este último caso, se trata de eventos **dependientes**.

## Eventos independientes

Muchos eventos no están condicionados por la ocurrencia de otro y se dice que son estadísticamente independientes. En este caso, la probabilidad se expresa simplemente por el producto de las probabilidades de cada evento:

$$P\left(A∩B\right)=P\left(A\right)∙P\left(B\right)$$

Por ejemplo, ¿Cuál es la probabilidad de que la Sra. Pérez dé a luz una niña (evento A) durante un día de lluvia (evento B)? Como ambos eventos son independientes uno del otro, la probabilidad del evento conjunto es igual al producto de las probabilidades de ambos eventos. Ya se sabe que el nacimiento de una niña es de 0.5 (el 50%) y que los días lluviosos dependen de la región. Si se sabe que en promedio hay 40 días de lluvia al año en Sonora, la probabilidad de un día lluvioso al azar es de 0.1096. Por tanto, la probabilidad de A **y** B es:

$$P\left(A∩B\right)=(0.50)(0.1096)=0.0548$$

Esto es, la probabilidad de que el nacimiento de una niña en Sonora ocurra en un día de lluvia es de 5.48%.

## Eventos dependientes

Hay eventos cuya ocurrencia determina la ocurrencia del otro. Se llaman eventos dependientes. Si se tiene A y B y se busca su probabilidad simultánea, y sucede que la aparición de A está condicionada por la aparición de B, entonces:

$$P\left(A∩B\right)=P\left(B\right)∙P\left(A | B\right)$$

En el caso de la probabilidad de B, el denominador es toda la muestra o población, mientras que en la probabilidad de A el denominador es la parte de la muestra o población que es B porque A está condicionado por B.

Donde la parte $P\left(A | B\right)$ se llama probabilidad condicional de A (condicionada a la aparición de B). Así, la probabilidad conjunta de A y B, está dada por la probabilidad de B (a la que llamamos **probabilidad marginal** de B) multiplicado por la probabilidad condicional de A.

EJEMPLO. Si en un hospital hay 100 pacientes de los cuales 60 son niños y 40 son adultos. De entre los niños, 10 tienen varicela; entre los adultos, 5 sufren de tabaquismo. El médico se pregunta por la probabilidad de que el primer paciente que entre a su consultorio sea un niño con varicela.

Si N=niño, A=adulto, NCV= niño con varicela, AT=adulto con tabaquismo, entonces lo que se busca es:

$$P\left(N∩N\_{CV}\right)=P\left(N\right)P\left(N\_{CV} | N\right)$$

$$P\left(N∩N\_{CV}\right)=\left(\frac{60}{100}\right)\left(\frac{10}{60}\right)=0.10$$

La probabilidad en la que piensa el médico de un 10%...

# Probabilidad conjunta[[1]](#footnote-1)

La regla de la multiplicación se aplica a la llamada **probabilidad conjunta**. El símbolo  indica la **intersección** de los conjuntos A y B. Un ejemplo al respecto es más ilustrativo.

En una ciudad se están analizando los hábitos de higiene pública. Se hace una entrevista a 2000 personas y se les hacen dos preguntas: La primera pregunta es si suele tirar basura en la vía pública. Las respuestas posibles son no (N), que son 1250 y sí (S), que son 750. La segunda pregunta es sobre el nivel de escolaridad, que se agrupan en dos respuestas, menor que licenciatura (B), que son 1800 y los que tienen licenciatura o más (U), que son 200. La información está en el siguiente cuadro.



Como el nivel de escolaridad y los hábitos de higiene no son variables independientes, se aplica la siguiente regla general:

$$P\left(A∩B\right)=P\left(B\right)∙P\left(A | B\right)$$

Como el problema tiene dos grupos divididos en dos categorías, hay 4 probabilidades conjuntas debido al hecho de que $P\left(A∩B\right)=P(B∩A)$. Así, tenemos:

$$P\left(N∩U\right)=P\left(U\right)∙P\left(N | U\right)=\left(\frac{200}{2000}\right)\left(\frac{150}{200}\right)=\frac{150}{2000}=0.075$$

$$P\left(N∩B\right)=P\left(B\right)∙P\left(N | B\right)=\left(\frac{1800}{2000}\right)\left(\frac{1100}{1800}\right)=\frac{1100}{2000}=0.550$$

$$P\left(S∩U\right)=P\left(U\right)∙P\left(S | U\right)=\left(\frac{200}{2000}\right)\left(\frac{50}{200}\right)=\frac{50}{2000}=0.025$$

$$P\left(S∩B\right)=P\left(B\right)∙P\left(S | B\right)=\left(\frac{1800}{2000}\right)\left(\frac{700}{1800}\right)=\frac{700}{2000}=0.350$$

Nótese que, en última instancia, la probabilidad condicional se obtiene directamente dividiendo cada casilla del cuadro anterior entre el total. En el caso del ejemplo, cada casilla entre 2000. El resumen se presenta en el siguiente cuadro.



# Probabilidad condicional

La probabilidad condicional está íntimamente ligada a la regla de la multiplicación son complementarias. La probabilidad condicional es la probabilidad de que ocurra un evento **dado que otro ha ocurrido**. Se le llama también **teorema de la probabilidad total**.

De la **probabilidad conjunta, P(A∩B) para eventos dependientes**, se obtiene la probabilidad condicional simplemente despejando la parte P(A|B):

$$P\left(B\right)=\frac{P(A∩B)}{P(B)}$$

Nótese que la probabilidad condicional proviene de la relación entre la probabilidad conjunta (la intersección de A y B) y la condición, en este caso, el subconjunto B.

Si el “número de casos posibles” de la regla de Laplace, el denominador, es el conjunto universal, las probabilidades se llaman marginales. Pero en las probabilidades condicionales el denominador es el conjunto condicional (que es un **subconjunto propio** del conjunto universal). Esto es, la probabilidad condicional se expresa como la **probabilidad de que ocurra el evento A dado que B ha ocurrido**.

En el ejemplo de los hábitos de higiene y educación, donde tenemos 4 probabilidades conjuntas (la intersección de los dos grupos y las dos categorías), tenemos 8 probabilidades condicionales porque $P(A|B)\ne P(B|A) $.

Se reproduce aquí el cuadro 2 para facilitar su uso:



En este cuadro, el último renglón y la última columna muestra las probabilidades marginales (es decir, las probabilidades que van en el denominador de las siguientes probabilidades).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | $$P\left(N|U\right)=\frac{P(N∩U)}{P(U)}=\frac{0.075}{0.10}=0.75$$ | 2 | $$P\left(U|N\right)=\frac{P(N∩U)}{P(N)}=\frac{0.075}{0.625}=0.12$$ |
| 3 | $$P\left(N|B\right)=\frac{P(B∩N)}{P(B)}=\frac{0.550}{0.90}=0.61$$ | 4 | $$P\left(B|N\right)=\frac{P(B∩N)}{P(N)}=\frac{0.550}{0.625}=0.88$$ |
| 5 | $$P\left(S|U\right)=\frac{P(S∩U)}{P(U)}=\frac{0.025}{0.10}=0.25$$ | 6 | $$P\left(U|S\right)=\frac{P(S∩U)}{P(S)}=\frac{0.025}{0.375}=0.067$$ |
| 7 | $$P\left(B|S\right)=\frac{P(B∩S)}{P(S)}=\frac{0.350}{0.375}=0.93$$ | 8 | $$P\left(S|B\right)=\frac{P(B∩S)}{P(B)}=\frac{0.350}{0.900}=0.389$$ |

Estas probabilidades responden a las siguientes preguntas:

P(N|U): ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona que NO tira basura si elegimos dentro de los que tienen educación universitaria o más?

P(U|N): ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona con nivel universitario o más si elegimos dentro de los que NO tiran basura?

P(S|U): ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona que SÍ tira basura si elegimos dentro de los que tienen educación universitaria o más?

P(U|S): ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona con nivel universitario o más si elegimos dentro de los que SÍ tiran basura?

P(N|B): ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona que NO tira basura si elegimos dentro de los que tienen educación básica?

P(B|N): Cuál es la probabilidad de elegir una persona con nivel básico si elegimos dentro de los que NO tiran basura?

P(B|S): ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona con nivel básico si elegimos dentro de los que SI tiran basura?

P(S|B): ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona que SÍ tira basura si elegimos dentro de los que tienen educación básica?

# Teorema de la probabilidad total

En la sección 3, la regla de la multiplicación para sucesos dependientes establece que la probabilidad conjunta de A y B es:

$$P\left(A∩B\right)=P\left(B\right)∙P\left(A | B\right)$$

En la sección 4 (anterior) vimos que esa regla nos permite calcular la probabilidad condicional, $P\left(A | B\right)$, suponiendo que conocemos la parte $P\left(A∩B\right)$ y la $P\left(B\right)$.

Ahora, en esta sección calcularemos **la probabilidad total de B**, suponiendo que conocemos las probabilidades de A, de las cuales la probabilidad de B es condicional: P(B|A). Así, el teorema de la probabilidad total permite calcular probabilidades a partir de probabilidades condicionadas. En este planteamiento, el suceso que queremos medir es B, pero B está condicionado a **que ocurran las diversas probabilidades de A**:

$$P\left(B\right)=\sum\_{}^{}P\left(A\_{i}\right)P(B|A\_{i})$$



Ejemplo. Suponga que el suceso A consiste en sacar una bola de un morral donde hay tres colores: (1) Amarilla, (2) Verde y (3) Roja. Las probabilidades de sacar esos colores son: P(A1)=0.50, P(A2)=0.30 y P(A3)=0.20.

El suceso B consiste en ganar, y las probabilidades son: P(B|A1)=0.40, P(B|A2)=0.60 y P(B|A3)=0.80.

Por tanto, la probabilidad de ganar es:

P(B) = (0.5)(0.40)+(0.30)(0.60)+(0.20)(0.80) = 0.54

El teorema de la probabilidad total es la idea sobre la que se construye el Teorema de Bayes, que se explica en la siguiente sección.

1. Ver para esta sección y las siguientes, así como para el tema 2.4, la liga: <https://bit.ly/2VMRaLR> [↑](#footnote-ref-1)